Roll No. ....

D–3648

B. Sc. (Part II) EXAMINATION, 2020

MATHEMATICS

Paper First

(Advanced Calculus)

Time : Three Hours] [*Maximum Marks : 50*

नोट : सभी प्रश्न अनिवार्य हैं। प्रत्येक प्रश्न से किन्हीं **दो** भागों को हल कीजिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

All questions are compulsory. Solve any *two* parts of each question. All questions carry equal marks.

इकाई—1

(UNIT—1)

1. (अ) प्रत्येक अभिसारी अनुक्रम परिबद्ध होता है, तथापि इसका विलोम सदैव सत्य नहीं है।

Every convergent sequence is bounded, but converse is not true.

(ब) श्रेणी

$$2x + \frac{3x^2}{8} + \frac{4x^3}{27} + ...x > 0$$

के अभिसरण या अपसरण का परीक्षण कीजिए।

Test the convergence or divergence of the series :

$$2x + \frac{3x^2}{8} + \frac{4x^3}{27} + \ldots\ldots x > 0$$

(स) एकान्तर श्रेणी के लिए लाइब्नित्ज परीक्षण लिखिए एवं सिद्ध कीजिए।

State and prove Leibnitz's test for alternating series.

इकाई—2

(UNIT—2)

2. (अ) परिबद्धता प्रमेय लिखिए एवं सिद्ध कीजिए।

State and prove Boundedness theorem.

(ब) रोले प्रमेय लिखिए एवं सिद्ध कीजिए।

State and prove Rolle's theorem.

(स) मध्यमान प्रमेय की सहायता से सिद्ध कीजिए कि यदि $x > 0$ हो, तो :

$$\log_{10}(1+x) = \frac{x \log_{10} e}{1+\theta_x},\ \text{जहाँ}\ 0 < \theta < 1\ ।$$

If $x > 0$, then show by mean value theorem, that :

$$\log_{10}(1+x) = \frac{x \log_{10} e}{1+\theta_x},\ \text{where } 0 < \theta < 1.$$

इकाई—3

(UNIT—3)

3. (अ) यदि $u = e^{xyz}$, तो दर्शाइए कि :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y\, \partial z} = \left(1 + 3xyz + x^2y^2z^2\right)e^{xyz}$$

If $u = e^{xyz}$, show that :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y\, \partial z} = \left(1 + 3xyz + x^2y^2z^2\right)e^{xyz}$$

(ब) समीकरण

$$\sin^2 2z \frac{d^2y}{dz^2} + \sin 4z \frac{dy}{dz} + 4y = 0$$

का रूपान्तरण $\tan z = e^x$ रखकर कीजिए।

Transform the equation :

$$\sin^2 2z \frac{d^2y}{dz^2} + \sin 4z \frac{dy}{dz} + 4y = 0$$

by the substitution $\tan z = e^x$.

(स) यदि :

$$u_1 = \frac{x_2 x_3}{x_1}$$

$$u_2 = \frac{x_1 x_3}{x_2}$$

और $$u_3 = \frac{x_1 x_2}{x_3}$$

तो सिद्ध कीजिए कि :

$$J(u_1, u_2, u_3) = 4.$$

If :

$$u_1 = \frac{x_2 x_3}{x_1}$$

$$u_2 = \frac{x_1 x_3}{x_2}$$

and $$u_3 = \frac{x_1 x_2}{x_3}$$

then prove that :

$$J(u_1, u_2, u_3) = 4.$$

इकाई—4

(UNIT—4)

4. (अ) सरल रेखाओं के कुल :

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha = l\sin\alpha\cos\alpha$$

का अन्वालोप ज्ञात कीजिए, जहाँ α प्राचल है। ज्यामिति व्याख्या कीजिए।

Find the envelope of the family of straight lines :

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha = l\sin\alpha\cos\alpha$$

where the parameter is the angle α. Give the geometrical interpretation.

(ब) मूलबिन्दु से समतल $x + 2y - 2z - 12 = 0$ की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए।

Find the minimum distance from the origin to the plane $x + 2y - 2z - 12 = 0$.

(स) सिद्ध कीजिए कि एक गोले के अन्तर्गत महत्तम आयतन वाला आयताकार ठोस एक घन होता है।

Prove that the rectangular parallelopiped of maximum volume that can be inscribed in a sphere is a cube.

इकाई—5

(UNIT—5)

5. (अ) सिद्ध कीजिए कि :

$$B(m,n) = \frac{\Gamma m\,\Gamma n}{\Gamma(m+n)}\,(m,n>0)$$

Prove that :

$$B(m,n) = \frac{\Gamma m\,\Gamma n}{\Gamma(m+n)}\,(m,n>0)$$

(ब) मूल्यांकन कीजिए :

$$\iiint_V z\,dx\,dy\,dz$$

जहाँ समाकलन प्रदेश V एक बेलन है जो निम्न पृष्ठों से परिबद्ध है :

$$z = 0$$
$$z = 1$$
$$x^2 + y^2 = 4.$$

Evaluate :

$$\iiint_V z\,dx\,dy\,dz$$

where the region of integration V is a cylinder, which is bounded by the following surface :

$$z = 0$$
$$z = 1$$
$$x^2 + y^2 = 4.$$

(स) समाकलन :

$$\int_0^{4a}\int_{\frac{x^2}{4a}}^{2\sqrt{ax}} dx\,dy$$

के क्रम को बदलकर मूल्यांकन कीजिए।

Change the order of integral $\int_0^{4a}\int_{\frac{x^2}{4a}}^{2\sqrt{ax}} dx\,dy$ and evaluate it.

D–3648	3,300